

INFORSID - Mercredi 30 mai 2018

Systemes d'information et de décision et démocratie

Quantifier, c'est déjà décider

Etienne Fieux, IMT, Toulouse



(...) Il est bien vrai comme vous dites que mes deux derniers problèmes ne posent pas de difficultés, néanmoins vous auriez bien fait d'en trouver la solution, car cela vous aurait donné l'occasion de faire une remarque curieuse.

Lettre de Nicolas Bernoulli à P. R. de Montmort
Bâle, 20 février 1714

(...) Je devrais vous entretenir à nouveau des deux problèmes que vous m'avez proposé page 402. J'ai déjà rédigé certaines choses par écrit, il y en a assez pour au moins 16 pages. Je n'ai pas la force pour entamer une si grande tâche, ce sera pour plus tard, parce qu'il est nécessaire de ne rien laisser derrière et de finir, si cela est possible, toutes nos disputes algébrique et philosophique.

Lettre de P. R. de Montmort à Nicolas Bernoulli
Paris, 22 mars 1715

(...) Je vous dois un mot sur les 5 problèmes, mais je vous demande un peu de temps, car j'ai la tête ailleurs et suis paresseux.

Lettre de P. R. de Montmort à Nicolas Bernoulli
Paris, 28 décembre 1716

Le jeu de Saint Petersburg

Le jeu de Saint Petersburg

Pierre et Paul jouent à lancer une pièce.

Le jeu de Saint Petersburg

Pierre et Paul jouent à lancer une pièce.

Le jeu s'arrête dès que la pièce tombe sur FACE.

Le jeu de Saint Petersburg

Pierre et Paul jouent à lancer une pièce.

Le jeu s'arrête dès que la pièce tombe sur FACE.

Si FACE tombe au 1er lancer, Paul donne 1 ducat à Pierre

Le jeu de Saint Petersburg

Pierre et Paul jouent à lancer une pièce.

Le jeu s'arrête dès que la pièce tombe sur FACE.

Si FACE tombe au 1er lancer, Paul donne 1 ducat à Pierre
" 2ème lancer, " 2 ducats "

Le jeu de Saint Petersburg

Pierre et Paul jouent à lancer une pièce.

Le jeu s'arrête dès que la pièce tombe sur FACE.

Si FACE tombe au 1er lancer, Paul donne 1 ducat à Pierre
" 2ème lancer, " 2 ducats "
" 3ème lancer, " 4 ducats "

Le jeu de Saint Petersburg

Pierre et Paul jouent à lancer une pièce.

Le jeu s'arrête dès que la pièce tombe sur FACE.

| | | | | |
|------------------|--------------|------------|----------|----------|
| Si FACE tombe au | 1er lancer, | Paul donne | 1 ducat | à Pierre |
| " | 2ème lancer, | " | 2 ducats | " |
| " | 3ème lancer, | " | 4 ducats | " |
| " | 4ème lancer, | " | 8 ducats | " |

Le jeu de Saint Petersburg

Pierre et Paul jouent à lancer une pièce.

Le jeu s'arrête dès que la pièce tombe sur FACE.

| | | | |
|------------------|------------------|------------|--------------------|
| Si FACE tombe au | 1er lancer, | Paul donne | 1 ducat à Pierre |
| " | 2ème lancer, | " | 2 ducats " |
| " | 3ème lancer, | " | 4 ducats " |
| " | 4ème lancer, | " | 8 ducats " |
| | ⋮ | | |
| " | n -ème lancer, | " | 2^{n-1} ducats " |
| | ⋮ | | |

Le jeu de Saint Petersburg

Pierre et Paul jouent à lancer une pièce.

Le jeu s'arrête dès que la pièce tombe sur FACE.

| | | | | |
|------------------|------------------|------------|------------------|----------|
| Si FACE tombe au | 1er lancer, | Paul donne | 1 ducat | à Pierre |
| " | 2ème lancer, | " | 2 ducats | " |
| " | 3ème lancer, | " | 4 ducats | " |
| " | 4ème lancer, | " | 8 ducats | " |
| | ⋮ | | | |
| " | n -ème lancer, | " | 2^{n-1} ducats | " |
| | ⋮ | | | |

Question : Combien Pierre doit-il donner à Paul pour que celui-ci accepte de jouer ?

*Le paradoxe vient du fait que le calcul dit
que A doit donner à B une somme infinie,
(...)*

Lettre de G. Cramer à Nicolas Bernoulli
Londres, 21 mai 1728

Calcul du gain moyen E

Ce que Paul doit donner à Pierre pour que le jeu soit équitable

événement

probabilité

gain

Calcul du gain moyen E

Ce que Paul doit donner à Pierre pour que le jeu soit équitable

événement F

probabilité $1/2$

gain 1

Calcul du gain moyen E

Ce que Paul doit donner à Pierre pour que le jeu soit équitable

| | | |
|-------------|-------|-----------|
| événement | F | PF |
| probabilité | $1/2$ | $(1/2)^2$ |
| gain | 1 | 2 |

Calcul du gain moyen E

Ce que Paul doit donner à Pierre pour que le jeu soit équitable

| | | | |
|-------------|-------|-----------|-----------|
| événement | F | PF | PPF |
| probabilité | $1/2$ | $(1/2)^2$ | $(1/2)^3$ |
| gain | 1 | 2 | 4 |

Calcul du gain moyen E

Ce que Paul doit donner à Pierre *pour que le jeu soit équitable*

| | | | | |
|-------------|-------|-----------|-----------|-----------|
| événement | F | PF | PPF | PPPF |
| probabilité | $1/2$ | $(1/2)^2$ | $(1/2)^3$ | $(1/2)^4$ |
| gain | 1 | 2 | 4 | 8 |

Calcul du gain moyen E

Ce que Paul doit donner à Pierre *pour que le jeu soit équitable*

| | | | | | | | |
|-------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----|--|-----|
| événement | F | PF | PPF | PPPF | ... | $\overbrace{PP \dots P}^{k \text{ fois } P} F$ | ... |
| probabilité | $1/2$ | $(1/2)^2$ | $(1/2)^3$ | $(1/2)^4$ | ... | $(1/2)^{k+1}$ | ... |
| gain | 1 | 2 | 4 | 8 | ... | 2^k | ... |

Calcul du gain moyen E

Ce que Paul doit donner à Pierre *pour que le jeu soit équitable*

| | | | | | | | |
|-------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----|--|-----|
| événement | F | PF | PPF | PPPF | ... | $\overbrace{PP \dots P}^{k \text{ fois } P} F$ | ... |
| probabilité | $1/2$ | $(1/2)^2$ | $(1/2)^3$ | $(1/2)^4$ | ... | $(1/2)^{k+1}$ | ... |
| gain | 1 | 2 | 4 | 8 | ... | 2^k | ... |

$$E = \frac{1}{2} + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 8 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \dots$$

Calcul du gain moyen E

Ce que Paul doit donner à Pierre *pour que le jeu soit équitable*

| | | | | | | | |
|-------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----|--|-----|
| événement | F | PF | PPF | PPPF | ... | $\overbrace{PP \dots P}^{k \text{ fois } P} F$ | ... |
| probabilité | $1/2$ | $(1/2)^2$ | $(1/2)^3$ | $(1/2)^4$ | ... | $(1/2)^{k+1}$ | ... |
| gain | 1 | 2 | 4 | 8 | ... | 2^k | ... |

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 8 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \dots \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots
 \end{aligned}$$

Calcul du gain moyen E

Ce que Paul doit donner à Pierre *pour que le jeu soit équitable*

| | | | | | | | |
|-------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----|--|-----|
| événement | F | PF | PPF | PPPF | ... | $\overbrace{PP \dots P}^{k \text{ fois } P} F$ | ... |
| probabilité | $1/2$ | $(1/2)^2$ | $(1/2)^3$ | $(1/2)^4$ | ... | $(1/2)^{k+1}$ | ... |
| gain | 1 | 2 | 4 | 8 | ... | 2^k | ... |

$$E = \frac{1}{2} + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 8 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots$$

$$= \infty$$

Le paradoxe vient du fait que le calcul dit que A doit donner à B une somme infinie,

Lettre de G. Cramer à Nicolas Bernoulli
Londres, 21 mai 1728

*Le paradoxe vient du fait que le calcul dit que A doit donner à B une somme infinie, **ce qui semble absurde car il n'y aurait personne de bon sens qui serait prêt à donner 20 pièces.***

Lettre de G. Cramer à Nicolas Bernoulli
Londres, 21 mai 1728

*Le paradoxe vient du fait que le calcul dit que A doit donner à B une somme infinie, **ce qui semble absurde car il n'y aurait personne de bon sens qui serait prêt à donner 20 pièces.** On demande alors la raison de cette différence entre le calcul mathématique et la sens commun.*

Lettre de G. Cramer à Nicolas Bernoulli

Londres, 21 mai 1728

Quelques « solutions »

Solution 1 de Cramer (lettre à N. B., 21 mai 1728)

Et mon espérance sera

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + + \frac{1}{8} \times 4 \dots + \frac{1}{2^{25}} 2^{24} + \frac{1}{2^{26}} 2^{24} + \frac{1}{2^{27}} 2^{24} + \&c$$

24 termes

$$= \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \&c = 12 + 1 = 13$$

Par conséquent, moralement parlant, mon espérance est réduite à 13 pièces, ce qui semble beaucoup plus raisonnable que l'infini. On pourra trouver une valeur plus petite en faisant d'autres hypothèses sur la valeur morale des richesses. Parce que ce que j'ai fait n'est pas vraiment juste puisqu'il est vrai que 100 millions feront plus plaisir que 10 millions même si ce n'est pas 10 fois plus.

Solution 2 de Cramer (post scriptum de la lettre à N. B., 21 mai 1728)

P. S. Si l'on veut supposer que la valeur morale des biens est comme la racine carrée des quantités mathématiques (...)

Mon espérance morale sera

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{1} + \frac{1}{4} \times \sqrt{2} + \frac{1}{8} \times \sqrt{4} + \frac{1}{16} \times \sqrt{8} + \dots + \&c = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

(...) Et mon équivalent sera donc (par hypothèse)

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \right)^2 = \frac{2}{12 - 8\sqrt{2}} = 2,9 \dots = \text{moins que } 3$$

qui est très médiocre et je crois être plus proche de l'estimation commune qu'avec 13.

Commentaire de Cramer (lettre à N. B., 21 mai 1728)

Vous verrez, Monsieur, que l'hypothèse [de prendre la racine carrée] n'est pas juste. Je crois qu'il est en fait impossible de trouver une hypothèse vraiment raisonnable. Mais cela suffit cependant, selon mon opinion, pour montrer, par le même calcul, qu'en homme sensé ne donnera pas un équivalent infini. On pourrait rédiger quelques Corollaires que j'ometts de peur de vous ennuyer.

Nicolas Bernoulli répond à Cramer

La réponse que vous donnez comme solution [au 5ème problème] satisfait seulement une partie de celui-ci ; il suffit, comme vous le dites, de montrer que A ne doit pas donner un équivalent infini à B ;
mais cela ne montre pas la vraie raison de la différence qu'il y a entre l'espérance mathématique et l'estimation commune.

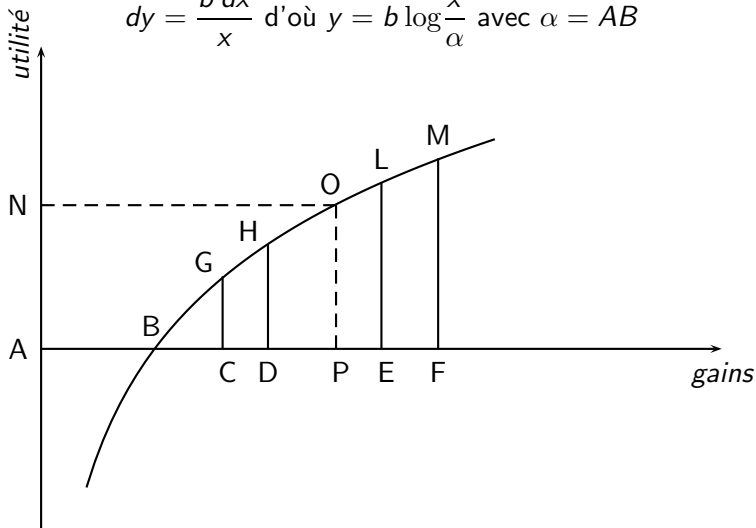
Bâle, 3 juillet 1728

*Si, de fait, je ne me trompe pas, il est évident qu'on ne peut imposer le même étalon à tous les hommes pour mesurer le sort, ni, par conséquent, adhérer à la règle du §1. Mais n'importe qui, désireux d'examiner attentivement tout ceci, s'aperçoit qu'on peut donner une définition du vocable valeur utilisé dans cette règle, de façon que tout ce qui s'ensuit s'impose à tous, à savoir celle de valeur estimée non pas à partir du prix de la chose mais à partir de l'utilité que chacun peut en tirer. **Le prix estimé à partir de la chose elle-même est le même pour tous, l'utilité dépend de la condition de chacun.** Il n'y a pas de doutes que 1000 ducats offrent plus d'avantages pour un pauvre que pour un riche, bien que le montant soit le même pour l'un et pour l'autre.*

Daniel Bernoulli

§4. Donc, à ce point maintenant de nos déductions, chacun peut retenir un simple changement de vocable : *mais, comme il y a là une hypothèse nouvelle, cela nécessitera quelque éclaircissement.* J'ai dressé en conséquence des modèles à présenter en bonne place, et que j'ai médités à cette fin. Mais, pour l'instant, voici la règle fondamentale que nous utiliserons : *Par multiplication de l'**utilité**, de chaque lot par le nombre de cas dans lesquels il est obtenu, sommation des produits et division par le nombre total de cas, on obtiendra sans faille une **utilité** moyenne et le gain correspondant à cette **utilité** équilibrera le sort considéré.*

$$dy = \frac{b dx}{x} \text{ d'où } y = b \log \frac{x}{\alpha} \text{ avec } \alpha = AB$$



$$AP^{m+n+p+q} = AC^m \cdot AD^n \cdot AE^p \cdot AF^q$$

Applications à des questions d'assurances

§15. Caius exerçant à Petersbourg, a acheté des marchandises que, s'il les avait à Pétersbourg, il pourrait vendre pour dix mille roubles. Il s'occupe donc de les faire transporter par mer, mais il se demande s'il doit ou non se couvrir par une assurance. En attendant, il n'ignore pas que sur cent navires prenant le départ à cette saison d'Amsterdam pour Pétersbourg, cinq d'ordinaire périssent ; et cependant, il ne peut s'assurer pour un prix inférieur à huit cent roubles, ce qu'il estime anormal. La question est donc de savoir quelle fortune, non compris ces marchandises, doit avoir Caius pour pouvoir négliger avec raison de s'assurer : soit x celle-ci ; (...)

Réponse :

$$(x + 10000)^{19} x = (x + 9200)^{20}, \text{ soit environ } x = 5043$$

D'où : Caius a intérêt à s'assurer si, et seulement si, $x > 5043$.

Une règle de prudence...

§16. *bien sûr, il est plus prudent de diviser en plusieurs parties des biens qui sont exposés au péril plutôt que de les placer en danger tous ensemble ; à nouveau, je vais développer ce point. Sempronius a des biens disponibles de 4000 ducats au total et possède, en sus, en terres étrangères, des marchandises pour 8000 ducats qu'on ne peut faire venir autrement que par mer. En outre, c'est un fait établi issu d'une longue pratique, que sur dix navires, un périt. Ceci étant posé, je dis que, pour Sempronius, la valeur attendue de ses marchandises, s'il les place toutes de 8000 ducats sur un bateau, est de 6751 ducats, à savoir*

$$12000^{9/10} \times 4000^{1/10} - 4000$$

Si, au contraire, il hasarde ses marchandises, par parties égales, sur deux navires, leur valeur attendue pour lui est

$$12000^{81/100} \times 8000^{18/100} \times 4000^{1/100} - 4000, \text{ soit } 7033 \text{ ducats}$$

Et alors, au jeu de Saint Petersburg,
on doit miser combien, selon Daniel Bernoulli ?

Tout dépend de la fortune initiale !

| | | | | |
|--------------------|---|----|-----|------|
| fortune initiale | 0 | 10 | 100 | 1000 |
| gain espéré (env.) | 2 | 3 | 4 | 6 |

Nicolas Bernoulli répond à son cousin

*J'ai trouvé V^otre théorie fort ingénieuse, **mais Vous me permettrés de Vous dire qu'elle ne resoud pas le nœud du problême en question.** Il ne s'agit pas de mesurer l'usage ou le plaisir qu'on tire d'une somme que l'on gagne, ni le defaut d'usage ou le chagrin qu'on a de la perte d'une somme : il ne s'agit pas non plus de chercher un équivalent entre ces choses-là ; mais **il s'agit de trouver combien un joueur est obligé selon la justice ou selon l'équité de donner à l'autre pour l'avantage que celui-ci lui accorde dans le jeu de hazard en question...***

Lettre de Nicolas Bernoulli à Daniel Bernoulli, 5 avril 1732

Que pense Daniel B. de la réponse de Nicolas B. ?

*Cette communication ayant été présentée à l'Académie, j'en ai envoyé copie au distingué Nicolas Bernoulli, cité plus haut, afin de savoir ce qu'il penserait de ma proposition pour résoudre son problème. Et de fait, dans une lettre qu'il m'a écrite en l'an 1732, il atteste que ma manière de voir la mesure des sorts ne lui déplait nullement, **pour autant que quelqu'un ait à estimer son sort mais non, comme cela peut arriver, si un tiers, à l'instar d'un juge, doit fixer en toute équité et justice le sort de l'une et l'autre parties.***

Note de Daniel Bernoulli, publiée à la fin de l'article « *Specimen Theoriae novae de mensura sortis* »(1738).

Est-ce si important ?

Autre chose : Jakob (oncle de Nicolas et Daniel) écrivait quelques années auparavant :

Cette découverte a pour moi plus de valeur que si j'avais résolu la quadrature du cercle, car si j'avais trouvé cette dernière, cela aurait été quand même moins utile.

Notes de Jakob Bernoulli (1688-1690)

Autre chose : Jakob (oncle de Nicolas et Daniel) écrivait quelques années auparavant :

Cette découverte a pour moi plus de valeur que si j'avais résolu la quadrature du cercle, car si j'avais trouvé cette dernière, cela aurait été quand même moins utile.

Notes de Jakob Bernoulli (1688-1690)

(cette découverte est ce qu'on appellera plus tard la **loi des grands nombres**)

Néanmoins, j'ai maintenant terminé la plus grande partie de mon livre, mais il me manque encore la partie principale dans laquelle je montre en outre comment appliquer les principes de l'art de conjecturer à la vie civile, morale et économique. C'est dans ce but que j'ai résolu un problème particulièrement remarquable dont la difficulté n'est pas négligeable et qui présente une utilité particulièrement grande ; il y a déjà plus de douze ans, mon frère en fut d'accord, même si celui-ci, questionné à ce sujet par Monsieur le Marquis de L'Hospital, tout à son penchant à déprécier mes travaux lui dissimula la vérité.

Les mathématiques mixtes

Cependant la distinction habituelle (...) entre la théorie formelle et ses interprétations - ou même celle du XIX-ème siècle entre mathématiques pures et appliquées - aurait été étrangère aux probabilistes du XXVIII-ème siècle. Ils se seraient définis comme des praticiens des « mathématiques mixtes ».

Les mathématiques mixtes et ses annexes étaient bien plus étroitement liées que la mathématique pure et ses applications ne le sont. En effet, la théorie classique des probabilités n'était rien de plus que la somme de ses applications.

Le « raisonnable » pris en charge par le calcul

Ce qui était en question entre les cousins Bernoulli n'était pas de savoir si espérance devait être le modèle du raisonnable mais ce qu'était exactement le raisonnable.

Nicolas défend le sens d'égalité dérivé des contrats aléatoires ; Daniel, le sens de prudence commerciale.

L'homme raisonnable n'est plus le juge désintéressé mais plutôt le marchand avisé : transformation historique que le calcul des probabilités enregistre. (...)

Le calcul des probabilités classiques était donc en même temps une description et une prescription du raisonnable.

(...)

Il y avait plusieurs sortes de bon sens qui donnaient des solutions différentes du même problème.

(passage du *raisonnable* au *rationnel*)

En 1840, le « calcul raisonnable » apparut à beaucoup de mathématiciens et philosophes comme une « aberration de intelligence ». Pour la première fois, les mathématiciens commencèrent à distinguer entre la théorie et les applications du calcul des probabilités, afin de sauver le calcul de ses applications douteuses.

(...)

Elle avait aussi perdu la justification de son ambition de fusionner les probabilités objective et subjective.

L. Daston, *L'interprétation classique du calcul des probabilités*, 1989.